

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει: $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$.

Ο τύπος της συνάρτησης f μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4} = \frac{x(x^2 - 16)}{x - 4} = \frac{x(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x(x + 4) = x^2 + 4x.$$

β) Είναι:

$$f(x) = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x - 32$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = -32$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144 > 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{-4 + 12}{2} & = 4 \\ \frac{-4 - 12}{2} & = -8 \end{cases}$$

Επειδή η f ορίζεται στο $A = \mathbb{R} - \{4\}$, δεκτή είναι μόνο η τιμή $x = -8$.