ΛΥΣΗ

α)

i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

ΑΔ = ΑΕ, από υπόθεση

ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση

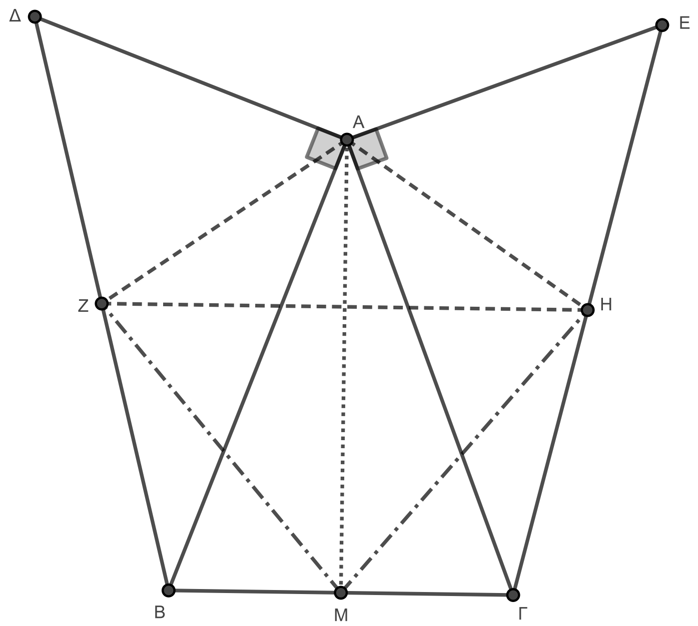
Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες οπότε είναι ίσα.

ii. Η ΑΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ, άρα ΑΖ = $\frac{\mathrm{B\Delta}}{2}$ (1).

Η ΑΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΕΑΓ, άρα ΑΗ = $\frac{\mathrm{\Gamma E}}{2}$ (2).

Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα έχουν και τις υποτείνουσες ΔΒ και ΕΓ ίσες.

Τότε, από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΑΖ = ΑΗ, οπότε το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.



iii. Τα τρίγωνα ΜΒΖ και ΓΗΜ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ, διότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- ΒΖ = ΗΓ, ως μισά των ίσων πλευρών ΔΒ και ΕΓ
- $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{H}$, διότι οι γωνίες Β και Γ της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΕ στα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ, οπότε $\widehat{\mathrm{B}} + \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \widehat{\Gamma} + \mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{H}$ και συνεπώς $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{H}$.

Τα τρίγωνα ΜΖΒ και ΓΗΜ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΜΖ = ΜΗ.

Επειδή ΑΖ = ΑΗ το Α ανήκει στη μεσοκάθετο του ΖΗ και ΜΖ = ΜΗ οπότε το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΖΗ. Άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετο του ΖΗ.

β) Οι γωνίες $\Delta\widehat{A}B$ και $E\widehat{A}\Gamma$ δεν είναι κατακορυφήν σε κάθε περίπτωση επειδή οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες. Οι γωνίες $\Delta\widehat{A}B$ και $E\widehat{A}\Gamma$ είναι κατακορυφήν μόνο όταν η γωνία $\Gamma\widehat{A}B$ είναι ορθή.