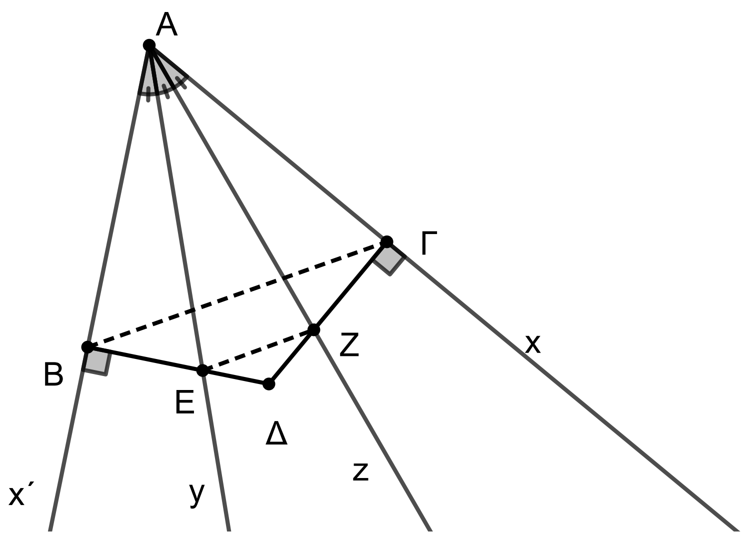
ΛΥΣΗ

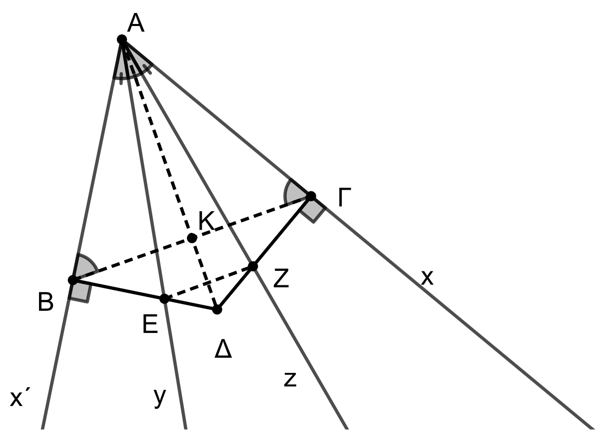


α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση και
- $B\widehat{A}E = Z\widehat{A}\Gamma$, αφού οι Αy, Αz χωρίζουν τη γωνία $x΄\widehat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ίσα γιατί έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα είναι ΑΕ = ΑΖ ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων, άρα το ΕΑΖ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια και έχουν ΑΔ κοινή πλευρά και ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση, οπότε θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα θα είναι ΒΔ= ΓΔ και $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα, οπότε ΑΔ διχοτόμος της $x΄\widehat{A}x$.



γ) Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διχοτόμος άρα και ύψος.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ ισχύει ότι:

$$K\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}K = 90^o \text{ ή } \Delta\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}K = 90^o \text{ ή } \Delta\widehat{A}\Gamma = 90^o - A\widehat{\Gamma}K \ (1)$$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα $A\widehat{\Gamma}B = A\widehat{B}\Gamma$ άρα και $A\widehat{\Gamma}K = A\widehat{B}\Gamma$, οπότε η σχέση (1) γίνεται $\Delta\widehat{A}\Gamma = 90^o - A\widehat{B}\Gamma = \Gamma\widehat{B}\Delta$, άρα $\Delta\widehat{A}\Gamma = \Gamma\widehat{B}\Delta$.