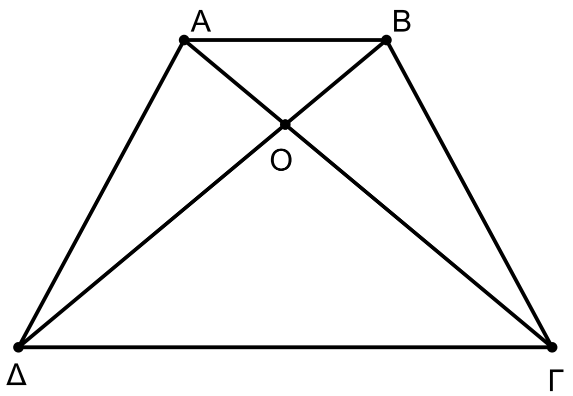
ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ έχουν:

- ΓΔ κοινή πλευρά
- ΑΔ = ΒΓ, από υπόθεση
- ΑΓ = ΒΔ, από υπόθεση

Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία άρα είναι ίσα οπότε: $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$ αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ. Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με ΟΓ = ΟΔ (1).

Ισχύει ακόμη ότι: ΑΓ = ΒΔ ή ΟΓ + ΟΑ = ΟΒ + ΟΔ ή ΟΑ = ΟΒ (λόγω της 1)).

Επομένως και το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΟ, επειδή ΟΑ=ΟΒ από το (α) ερώτημα, οι γωνίες $\Gamma\hat{A}B$, $A\hat{B}\Delta$ είναι ίσες.

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΔ, οι γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες αφού είναι απέναντι από την κοινή πλευρά ΓΔ.

Άρα $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}B = \Delta\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma$

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΔ, οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες, αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΓ και ΒΔ.

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$\Delta\hat{A}B + A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 360^o$ ή $2\Delta\hat{A}B + 2A\hat{\Delta}\Gamma = 360^o$ ή $\Delta\hat{A}B + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o$

Οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες (2).

Αν υποθέσουμε ότι ΑΔ // ΒΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν παραλληλόγραμμο και θα είχε ΑΒ = ΓΔ που είναι άτοπο αφού ΑΒ < ΓΔ. Άρα οι ΑΔ, ΒΓ δεν είναι παράλληλες (3).

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και επειδή ΑΔ = ΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.