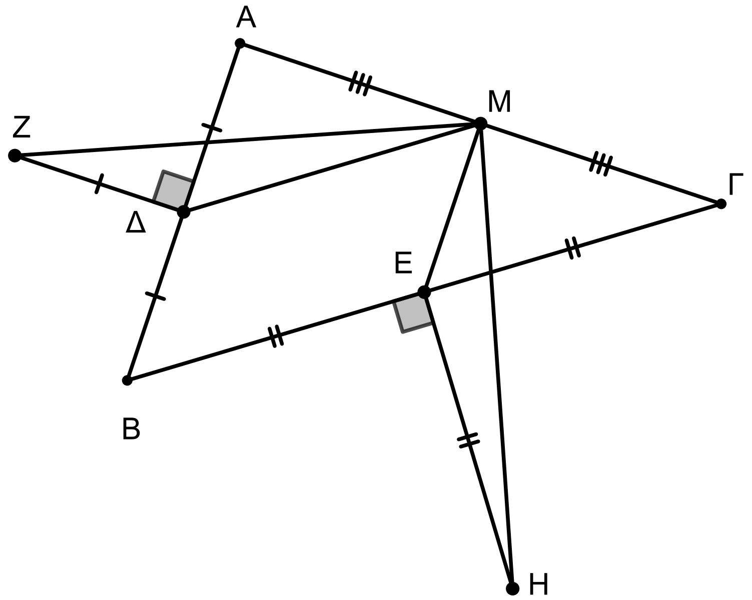
ΛΥΣΗ



α) i. Επειδή τα Δ και Μ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι

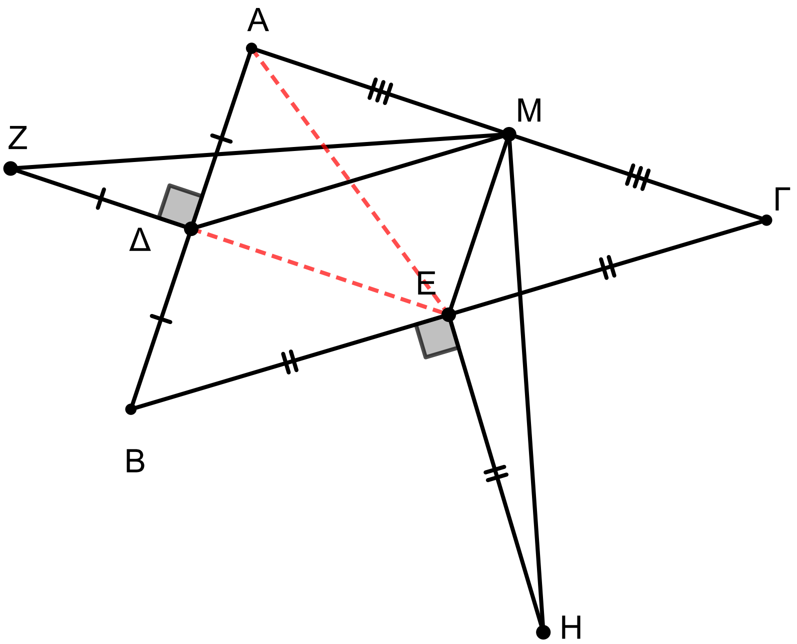
ΔΜ // ΒΓ ή ΔΜ // ΒΕ και ΔΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΒΕ.

Στο τετράπλευρο ΒΔΜΕ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες (ΔΜ //= ΒΕ), άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ έχουν:

- ΖΔ = $\frac{ΑΒ}{2}$ = ΒΔ = ΜΕ, αφού τα ΒΔ και ΜΕ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- ΜΔ = ΒΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΕΗ, αφού τα ΜΔ, ΒΕ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- Μ$\hat{Ε}$Η = Ζ$\hat{Δ}$Μ, διότι
   - Μ$\hat{Ε}$Η = Η$\hat{Ε}$Γ + Μ$\hat{Ε}$Γ = 90° + Μ$\hat{Ε}$Γ,
   - Ζ$\hat{Δ}$Μ = 90° + Α$\hat{Δ}$Μ,
   - Μ$\hat{Ε}$Γ = $\hat{Β}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΕ.
   - Α$\hat{Δ}$Μ =$\hat{Β}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες άρα είναι ίσα.



β)Το ΜΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ άρα ισχύει ότι:

ΜΕ // = $\frac{AB}{2}$ ή ΜΕ // = ΑΔ

Επομένως το ΑΜΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή τα σημεία Ζ, Δ και Ε είναι συνευθειακά και ΖΔ $\perp$ ΑΒ

θα είναι και ΕΔ $\perp$ ΑΒ, δηλαδή Ε$\widehat{Δ}$Α = 90^o.

Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΑΜΕΔ έχει μια γωνία ορθή άρα είναι ορθογώνιο δηλαδή:

$\widehat{A}$ =90^o.