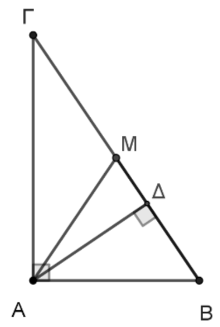
ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}}$ = 90ο και $\widehat{\mathrm{B}}$ >$\widehat{\Gamma}$, ΑΔ το ύψος του προς στην ΒΓ και ΑΜ διάμεσός του στην πλευρά ΒΓ.



α) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{\mathrm{A}}$ = 90ο) ισχύει ότι:

$$\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 90^o \text{ ή } \widehat{\mathrm{B}} = 90^o - \widehat{\Gamma} \ (1)$$

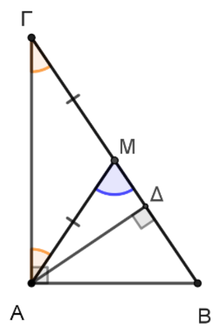
Αφού ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma=90^0$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ισχύει ότι:

$$\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta + \widehat{\Gamma} = 90^o \text{ ή } \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 90^o - \widehat{\Gamma} \ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\widehat{\mathrm{B}} = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$.

β)



Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε θα είναι $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} = \mathrm{M}\Gamma$, αφού Μ μέσο της ΒΓ.

Αφού ΑΜ=ΜΓ τότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο πλευρές του ίσες, οπότε $\widehat{\Gamma} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ (3) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΑΜΔ η γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Delta$ είναι εξωτερική της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma$ του τριγώνου ΑΜΓ, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή

$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Delta = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma + \widehat{\Gamma}$ και αφού είναι $\widehat{\Gamma} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ (σχέση (3)), τότε θα είναι:

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Delta = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} \text{ ή } \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Delta = 2\widehat{\Gamma}$$