

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2, \text{ οπότε}$$

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2, \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha| \cdot |\beta|} \geq 2, \text{ οπότε}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha| \cdot |\beta|, \text{ συνεπώς}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0 \text{ και τελικά}$$

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $|\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$, δηλαδή αν και μόνο αν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ (δηλαδή όταν οι αριθμοί α, β είναι ίσοι ή αντίθετοι).