

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \stackrel{\alpha < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha^2 + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \geq -2\alpha, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha^2 + 1 + 2\alpha \geq 0, \text{ οπότε}$$

$$(\alpha + 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2 \stackrel{\alpha < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$-\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2, \text{ οπότε}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2, \text{ που από το α) ερώτημα ισχύει για κάθε } \alpha < 0.$$