ΛΥΣΗ

α) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-5x^2 - 3x + 1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - 3x + 1) = 1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

επιπλέον f(0) = 1. Οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

β) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-5x^2-3x+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(-5x-3)x}{x} = -3$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-3x+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x-3)x}{x} = -3$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -3 = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = -3$.

γ)

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-1,1], αφού είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα (-1,0) και (0,1) ως πολυωνυμική και συνεχής στο 0 από ερώτημα α).
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,1) αφού, για κάθε $x < 0$ ισχύει $f'(x) = -10x - 3$, για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) = 2x - 3$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = -3$.
- $f(-1) = -1 = f(1)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα [-1,1], συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Επειδή $f'(x) = \begin{cases} -10x - 3, & αν\ x \in (-1,0) \\ 2x - 3, & αν\ x \in (0,1) \end{cases}$, από τη λύση της εξίσωσης $f'(x) = 0$ έχουμε :

Αν $x \in (-1,0)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -10x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{10} \in (-1,0)$

Αν $x \in (0,1)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin (0,1)$, άρα

για την f το $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$ είναι το $x_0 = -\frac{3}{10}$.