ΛΥΣΗ

α) Για x < 0 η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, για x > 0 η συνάρτηση f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο 1 με τον ορισμό.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1-\sigma\upsilon\nu x) = 1-1 = 0$$

$$f(0) = 1-\sigma\upsilon\nu 0 = 1-1 = 0$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ = $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ = 0 , άρα $\lim_{x\to 0} f(x)$ = 0

και επιπλέον $f(0)$ = 0. Οπότε η f είναι συνεχής και στο 0.

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Σύμφωνα με το ερώτημα α) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο [-2 , π], οπότε το ζητούμενο εμβαδό Ε είναι ίσο με Q

Ε = $\int_{-2}^{\pi} |f(x)|dx = \int_{-2}^{0} |f(x)|dx + \int_{0}^{\pi} |f(x)|dx$ = $\int_{-2}^{0} x^2\,dx$ + $\int_{0}^{\pi} (1-\sigma\upsilon\nu x)dx$, αφού $x^2 \geq 0$ και $1-\sigma\upsilon\nu x \geq 0$.

όμως $\int_{-2}^{0} x^2\,dx$ = $\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3}$, και

$\int_{0}^{\pi} (1-\sigma\upsilon\nu x)dx = [x-\eta\mu x]_0^{\pi} = (\pi - \eta\mu\pi) - (0 - \eta\mu 0) = \pi$.

Άρα Ε = $\left(\frac{8}{3}+\pi\right)$ τ.μ.