ΛΥΣΗ

α) Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f, της C_g και της C_h αντίστοιχα, αποτελεί το πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτησης. Από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[3,7]$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $[5,7]$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το διάστημα $[5,7]$.

β)

i. Οι συναρτήσεις f, g και h είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους από την υπόθεση. Συγκεκριμένα:

- Η f είναι συνεχής στο $[3,7]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,7)$. Οι τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της δεν είναι ίσες, αφού $f(3) \neq f(7)$.
- Η g είναι συνεχής στο $[5,7]$ και παραγωγίσιμη στο $(5,7)$. Οι τιμές της g στα άκρα του πεδίου ορισμού της είναι ίσες, αφού $g(5) = g(7)$.
- Η h είναι συνεχής στο $[5,7]$ και παραγωγίσιμη στο $(5,7)$. Οι τιμές της h στα άκρα του πεδίου ορισμού της δεν είναι ίσες, αφού $h(5) \neq h(7)$.

Άρα οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ισχύουν μόνο για τη συνάρτηση g στο πεδίο ορισμού της $[5,7]$.

ii. Παρατηρούμε ότι και οι 3 γραφικές παραστάσεις των f, g και h εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$. Οπότε και οι 3 γραφικές παραστάσεις δέχονται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο τους $(6,0)$, δηλαδή ισχύει ότι $f'(6) = g'(6) = h'(6) = 0$. Επομένως για κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου τους, η $x = 6$.