ΛΥΣΗ

α) Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f και της C_h αντίστοιχα, αποτελεί το πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτησης. Από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[2,7]$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το διάστημα $[5,7]$.

β) Παρατηρούμε ότι και οι 2 γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ το σημείο $A(6,0)$, οπότε ισχύει $f(6) = h(6) = 0$.

i. $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ γιατί $\lim_{x\to 6} f(x) = f(6) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο 6, αφού η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και βρίσκεται πάνω από αυτόν κοντά στο 6.

ii. Το $\lim_{x\to 6} \frac{1}{h(x)}$ δεν υπάρχει. Γιατί:

   $\lim_{x\to 6} h(x) = h(6) = 0$, αφού η C_h εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{A}(6,0)$.

   Είναι $h(x) < 0$ για $x < 6$. Άρα $\lim_{x\to 6^-} \frac{1}{h(x)} = -\infty$.

   Ενώ $h(x) > 0$ για $x > 6$. Άρα $\lim_{x\to 6^+} \frac{1}{h(x)} = +\infty$.

iii. Για το $\lim_{x\to 6} \frac{f(x)}{x-6}$ έχουμε:

   $\lim_{x\to 6} \frac{f(x)}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{f(x)-0}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{f(x)-f(6)}{x-6} = f'(6)$, αφού η f από την υπόθεση είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο $x_0 = 6$.

   Όμως, από την υπόθεση, η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο της $A(6,0)$, τον άξονα $x'x$. Οπότε, η παράγωγος της στο σημείο αυτό, δηλαδή το $f'(6)$, θα ισούται με 0.

   Άρα, τελικά $\lim_{x\to 6} \frac{f(x)}{x-6} = 0$.