ΛΥΣΗ

α) Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της $C\_{f}$ και της $C\_{h}$ αποτελεί το πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτησης. Από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το διάστημα $[2,7]$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h$ είναι το διάστημα $[5,7]$.

β)

1. Οι συναρτήσεις $f $και $h$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους από την υπόθεση. Συγκεκριμένα:
* Η $f$ είναι συνεχής στο $[2,7]$ αλλά οι τιμές της $f$ στα άκρα του πεδίου ορισμού της δεν είναι ετερόσημες, αφού τα σημεία $(2,f\left(2\right))$ και $(7,f\left(7\right))$ βρίσκονται πάνω από τον άξονα x’x.
* Η $h$ είναι συνεχής στο $[5,7]$ και οι τιμές της $h$ στα άκρα του πεδίου ορισμού της είναι ετερόσημες, αφού τα σημεία $(5,h\left(5\right))$ και $(7,h\left(7\right))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x’x.

Άρα οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano ισχύουν μόνο για τη συνάρτηση $h$ στο $[5,7]$.

1. Παρατηρούμε ότι και οι 2 γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν κοινό σημείο με τον άξονα x’x το σημείο $Α(6,0)$, οπότε ισχύουν $f\left(6\right)=h\left(6\right)=0$.

Για την $h$ ήταν αναμενόμενο να υπάρχει $x\_{0 }\in (5,7)$ τέτοιο ώστε $h(x\_{0 })=0$, αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο αντίστοιχο διάστημα. Αλλά και η συνάρτηση $f$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο πεδίο ορισμού της αν και είδαμε ότι δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano.