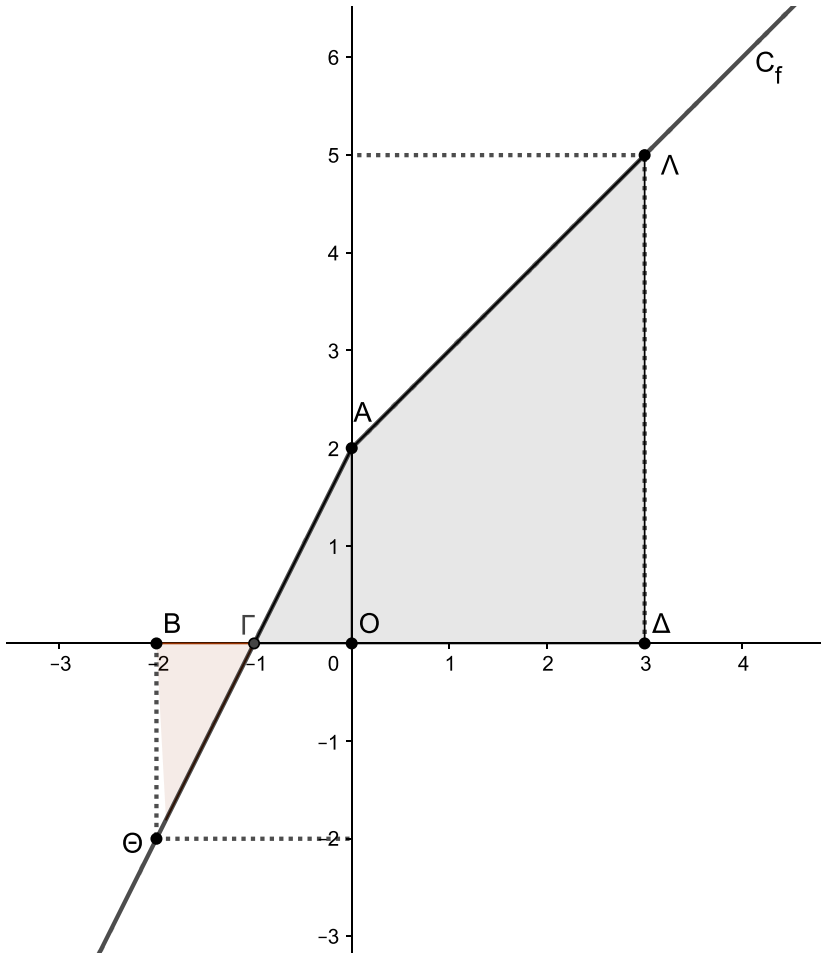
ΛΥΣΗ

α)



i. Στο διάστημα $[-2,-1]$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Άρα το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-2$ και $x=-1$ είναι το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{-1}|f(x)|dx = -\int_{-2}^{-1} f(x)dx$. Το εμβαδόν όμως του χωρίου αυτού ισούται επίσης με το εμβαδόν του τριγώνου ΓΒΘ.

Για το τρίγωνο ΓΒΘ έχουμε ότι $\text{ΓΒ} = |-1-(-2)| = 1$ και $\text{ΒΘ} = |-2-0| = 2$.

Άρα $(\text{ΓΒΘ}) = \frac{1}{2}\cdot \text{ΓΒ}\cdot \text{ΒΘ} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$ Επομένως:

$$-\int_{-2}^{-1} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x)dx = -1$$

ii. Στο διάστημα $[-1,0]$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, οπότε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ θα ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΑ. Είναι $\text{ΟΓ} = |-1-0| = 1$ και $\text{ΟΑ} = 2$. Άρα

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \text{ΟΓ} \cdot \text{ΟΑ} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

iii. Στο διάστημα $[0,3]$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, οπότε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f(x)dx$ θα ισούται με το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΑΛΔ. Είναι $\text{ΟΑ} = 2$, $\text{ΛΔ} = 5 - 0 = 5$ και $\text{ΟΔ} = 3$. Άρα

$$\int_{0}^{3} f(x)dx = \frac{\text{ΟΑ} + \text{ΔΛ}}{2} \cdot \text{ΟΔ} = \frac{2+5}{2} \cdot 3 = \frac{21}{2}$$

β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 3$ είναι το $\int_{-2}^{3} |f(x)|dx$. Σύμφωνα με το α) ερώτημα θα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΓΒΘ, ΟΓΑ και του τραπεζίου ΟΑΛΔ. Άρα:

$$\int_{-2}^{3} |f(x)|dx = -\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = 1 + 1 + \frac{21}{2} = \frac{25}{2}\ \tau.\mu.$$