ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $g'(x) = (-x)' \cdot e^{-x} = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα είναι και «$1-1$», επομένως υπάρχει η συνάρτηση g^{-1}.

Θέτουμε $y = e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in R$, άρα $lny = -x \Leftrightarrow x = -lny$ για κάθε $y \in (0, +\infty)$.

Έτσι, $g^{-1}(y) = -lny$ για κάθε $y > 0$, δηλαδή $g^{-1}(x) = -lnx$ για κάθε $x > 0$.

Ώστε $g^{-1} = -f$.

β)Το πεδίο ορισμού D της συνάρτησης $g \circ f$, αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x \in A_f = (0, +\infty)$ και $f(x) = lnx \in A_g = R$.

Ώστε $D = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in D$ είναι $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(lnx) = e^{-lnx} = \frac{1}{e^{lnx}} = \frac{1}{x}$.

γ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $[2, 8]$, με $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Επομένως, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, θα υπάρχει $\xi \in (2, 8)$ ώστε $h'(\xi) = \frac{h(8)-h(2)}{8-2}$, άρα

$$-\frac{1}{\xi^2} = \frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{-3}{8}}{6} = -\frac{3}{48} = -\frac{1}{16}.$$

Ώστε $\xi^2 = 16$, άρα $\xi = 4$.