ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

β) Ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = \frac{(\eta\mu x)' \cdot x - \eta\mu x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \eta\mu x}{x^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot x - \eta\mu x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' \cdot x + \sigma\upsilon\nu x \cdot (x)' - (\eta\mu x)' = -\eta\mu x \cdot x + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x$$

$$= -\eta\mu x \cdot x < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Αφού η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Οπότε, για κάθε x, με $0 < x < \frac{\pi}{2}$ θα είναι $g(0) > g(x) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

Επομένως, θα είναι:

$$f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \eta\mu x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Για $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ και αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε:

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} \geq f(x) \geq \frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} \geq f(x) \geq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \leq f(x) \leq \frac{3}{\pi}$$

Επομένως, θα είναι:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\, dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\pi}\, dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \leq \frac{3}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \leq \frac{3}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \leq \frac{1}{4}$$