

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0 = 0$,

για την οποία ισχύει

$$xf(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

(Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 09)

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \leq \frac{1}{4}$$

(Μονάδες 08)