ΛΥΣΗ

α) Δίνεται ότι:

$$f^2(x) + x^2 = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 4 - x^2 \text{ για κάθε } x \in [-2,2] \quad (1)$$

Η εξίσωση $f(x) = 0$ στο $[-2,2]$ γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $[-2,2]$ είναι μόνο οι αριθμοί -2 και 2.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-2,2)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό. Επομένως, η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Αφού είναι $f(0) = 2 > 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2,2)$.

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2},\ x \in (-2,2)$$

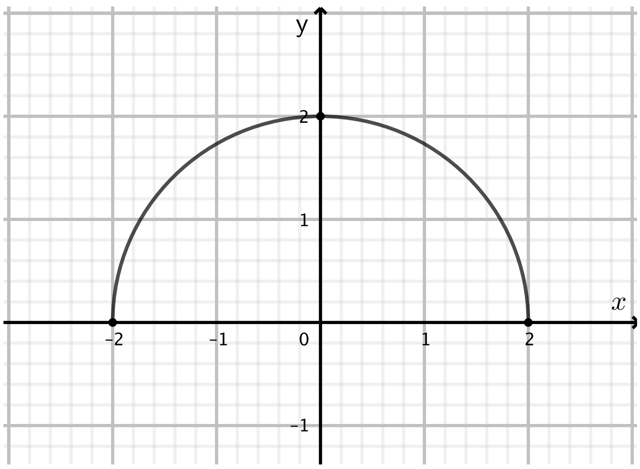
Όμως, $f(-2) = f(2) = 0$, οπότε:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2,2]$$

γ) Είναι:

$$f^2(x) + x^2 = 4 \overset{f(x)=y}{\Longleftrightarrow} y^2 + x^2 = 2^2 \text{ με } y = f(x) \geq 0$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο του σχήματος, το οποίο έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.



δ) Έστω $x(t)$ η τετμημένη και $y(t)$ η τεταγμένη του κινητού τη χρονική στιγμή t. Τη χρονική στιγμή t_o το κινητό περνάει από το σημείο $B(-1,\sqrt{3})$, οπότε είναι:

$$x(t_o) = -1,\ y(t_o) = \sqrt{3}$$

Επίσης δίνεται ότι:

$$y'(t_o) = 2 \text{ μονάδες/sec}$$

Αφού το κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f, θα είναι:

$$x^2(t) + y^2(t) = 4$$

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\left(x^2(t) + y^2(t)\right)' = (4)' \Leftrightarrow 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$$

Τη χρονική στιγμή t_o θα είναι:

$$x'(t_o) = \frac{-y(t_o)y'(t_o)}{x(t_o)} = \frac{-\sqrt{3}\cdot 2}{-1} = 2\sqrt{3} \text{ μονάδες/sec}$$