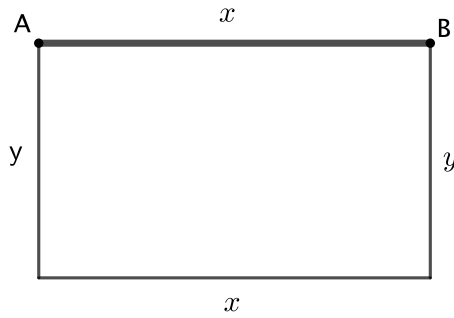


ΛΥΣΗ



α) Το κόστος περιφράξης της πέτρινης πλευράς είναι ίσο με $6x$, ενώ το κόστος περιφράξης του συρμάτινου φράχτη είναι ίσο με $2x + 2y \cdot 2 = 2x + 4y$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 800 m^2 , οπότε:

$$xy = 800 \Leftrightarrow y = \frac{800}{x}$$

Επομένως, το συνολικό κόστος της περιφράξης του κτήματος, συναρτήσει του x , είναι:

$$K(x) = 6x + 2x + 4 \frac{800}{x} = 8x + \frac{3200}{x}, x > 0$$

β) Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$K'(x) = 8 - \frac{3200}{x^2} = \frac{8x^2 - 3200}{x^2} = \frac{8(x^2 - 400)}{x^2}$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8(x^2 - 400)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 400 = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 20$$

$$K'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (20, +\infty)$$

$$K'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 20)$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της συνάρτησης K φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	20	$+\infty$
$K'(x)$			$- \quad 0 \quad +$	
$K(x)$			$\swarrow \quad \searrow$	

Η συνάρτηση K είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 20]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[20, +\infty)$, αφού $K(x)$ είναι συνεχής ως ρητή. Επομένως, η συνάρτηση K παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 20 \text{ m}$. Τότε είναι:

$$y = \frac{800}{20} = 40 \text{ m}$$

Η τιμή του ελάχιστου κόστους ισούται με:

$$K(20) = 8 \cdot 20 + \frac{3200}{20} = 160 + 160 = 320 \text{ ευρώ}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$K'(x) = 8 - \frac{3200}{x^2}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $K'(x)$ είναι:

$$K''(x) = \frac{6400}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Επομένως, η συνάρτηση K' είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x > 0$.