ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(x^3 + \frac{1}{4}x\right)' = 3x^2 + \frac{1}{4}$.

Η εφαπτομένη ε, της γραφικής παράστασης C_f της f, στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, έχει εξίσωση

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$y - \left(\alpha^3 + \frac{1}{4}\alpha\right) = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)(x - \alpha)$$

$$y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 3\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha + \alpha^3 + \frac{1}{4}\alpha$$

$$y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3.$$

β) i. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι προβολείς του αυτοκινήτου, φωτίζουν κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C_f, καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της C_f. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι η

$$\varepsilon:\ y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3.$$

Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t_o, που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0, οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Επομένως η εφαπτομένη ε διέρχεται από το σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$, άρα

$$\frac{1}{4} = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot 0 - 2\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Άρα, η τετμημένη του σημείου A_0 είναι $-\frac{1}{2}$ και η τεταγμένη του είναι

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Επομένως είναι $A_0\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

ii. Καθώς το αυτοκίνητο κινείται κατά μήκος της C_f, μπορούμε να θεωρήσουμε την τετμημένη και την τεταγμένη του αυτοκινήτου, ως συναρτήσεις του χρόνου t. Έτσι αντίστοιχα, έχουμε τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t) = f\big(x(t)\big) = (x(t))^3 + \frac{1}{4}x(t),\ t > 0$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_o είναι 2, οπότε $x'(t_o) = 2$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $x(t_o) = -\frac{1}{2}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου είναι

$$y'(t) = \left(\big(x(t)\big)^3 + \frac{1}{4}x(t)\right)' = 3\big(x(t)\big)^2 x'(t) + \frac{1}{4}x'(t),\ t > 0.$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_o θα είναι

$$y'(t_o) = 3\left(x(t_o)\right)^2 x'(t_o) \;\; + \frac{1}{4}x'(t_o) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \;\; + \frac{1}{4} \cdot 2 = 2$$

(μονάδες μήκους ανά μονάδα χρόνου).