ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ και η g το $\mathrm{B}=\mathbb{R}$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Είναι

$$\begin{aligned}&f(x)=g(x)\Leftrightarrow\\&x^2-2x=3x-4\Leftrightarrow\\&x^2-5x+4=0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot4=25-16=9>0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{5\pm3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{5+3}{2}=\dfrac{8}{2}=4\\[2mm] x_2=\dfrac{5-3}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

Για $x=4$ έχουμε: $g(4)=3\cdot4-4=12-4=8$.

Για $x=1$ έχουμε: $g(1)=3\cdot1-4=3-4=-1$.

Συνεπώς τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, είναι τα $\mathrm{A}(4,8)$ και $\mathrm{B}(1,-1)$.

β) Τα διαστήματα για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g είναι εκείνα για τα οποία ισχύει: $f(x)<g(x)$. Είναι

$$\begin{aligned}&f(x)<g(x)\Leftrightarrow\\&x^2-2x<3x-4\Leftrightarrow\\&x^2-5x+4<0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει και ρίζες τις $x_1=4$, $x_2=1$ και το πρόσημό του

φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
x^2-5x+4	+	0 -	0 +	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι $x^2-5x+4<0\Leftrightarrow x\in(1,4)$.

γ) Κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν ισχύει: $f(x)>\alpha$, για κάθε $\alpha<-1$. Είναι

$$f(x) > \alpha \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x > \alpha \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x - \alpha > 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\alpha) = 4 + 4\alpha < 0 \text{, για κάθε } \alpha < -1$$

οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x^2 - 2x - \alpha > 0 \Leftrightarrow f(x) > \alpha$$

που σημαίνει ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.