ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2+x+1 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 1-4 = -3 < 0$$

οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x^2+x+1>0 \Leftrightarrow f(x)>0$$

που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$ και άρα δεν τέμνει τον $x'x$.

β) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$$\begin{aligned}&f(x)<2x+3 \Leftrightarrow\\ &x^2+x+1<2x+3 \Leftrightarrow\\ &x^2-x-2<0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου x^2-x-2 φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	-∞		-1		2		+∞
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

Συνεπώς $x^2-x-2<0 \Leftrightarrow x\in(-1,2)$.

γ) Αφού $|2x-1|<3$, έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned}&|2x-1|<3 \Leftrightarrow\\ &-3<2x-1<3 \Leftrightarrow\\ &-3+1<2x-1+1<3+1 \Leftrightarrow\\ &-2<2x<4 \Leftrightarrow\\ &-1<x<2\end{aligned}$$

Αφού για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $-1<x<2$ τότε, όπως δείξαμε στο ερώτημα β), το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.