ΛΥΣΗ

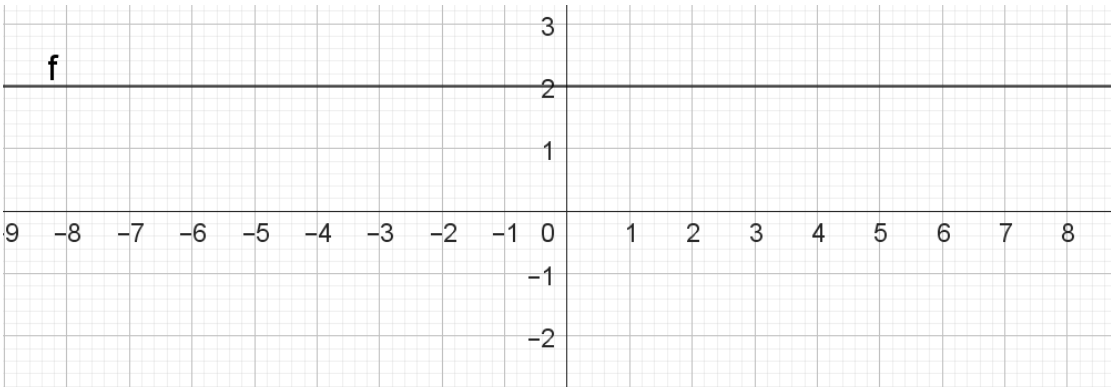
α) Η γραφική παράσταση της $f$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$ για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda$, αν και μόνο αν ισχύει ότι $f(0)=2$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πράγματι είναι $f(0)=(\lambda+1)\cdot 0^2-(\lambda+1)\cdot 0+2=2$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda=-1$ ο τύπος της $f$ γράφεται:

$$f(x)=(-1+1)x^2-(-1+1)x+2=2$$

Επομένως η γραφική παράσταση της $f$ είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




γ) Η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{B}(2,0)$ και επομένως ισχύει ότι $f(2)=0$. Είναι

$$\begin{aligned}
&f(2)=0 \Leftrightarrow \\
&(\lambda+1)\cdot 2^2-(\lambda+1)\cdot 2+2=0 \Leftrightarrow \\
&4\lambda+4-2\lambda-2+2=0 \Leftrightarrow \\
&2\lambda=-4 \Leftrightarrow \\
&\lambda=-2
\end{aligned}$$

Για $\lambda=-2$ έχουμε:

$$f(x)=(-2+1)x^2-(-2+1)x+2=-x^2+x+2$$

Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f$ με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0$$

Το τριώνυμο $-x^2+x+2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=1^2-4\cdot(-1)\cdot 2=1+8=9>0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm 3}{-2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+3}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1 \\ x_2=\dfrac{-1-3}{-2}=\dfrac{-4}{-2}=2 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον $x'x$ εκτός από το $\mathrm{B}(2,0)$ και στο σημείο $(-1,0)$.

δ) Για $\lambda=1$ ο τύπος της $f$ γράφεται:

$$f(x)=(1+1)x^2-(1+1)x+2=2x^2-2x+2=2(x^2-x+1)$$

Το τριώνυμο $x^2-x+1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$$

οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι ομόσημο του συντελεστή του $x^2$, δηλαδή του $\alpha=1>0$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x^2-x+1>0\Leftrightarrow 2(x^2-x+1)>0\Leftrightarrow f(x)>0$$

που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.