ΛΥΣΗ

α) Αφού $f(2)=g(2)$ έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
&f(2)=g(2) \Leftrightarrow \\
&2^2-4\cdot 2+\alpha=\alpha\cdot 2-5 \Leftrightarrow \\
&4-8+\alpha=2\alpha-5 \Leftrightarrow \\
&\alpha-2\alpha=-4+8-5 \Leftrightarrow \\
&-\alpha=-1 \Leftrightarrow \\
&\alpha=1
\end{aligned}$$

β) Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=x^2-4x+1$ και $g(x)=x-5$.

i) Η εξίσωση: $f(x)=g(x)$ γίνεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
&x^2-4x+1=x-5 \Leftrightarrow \\
&x^2-4x+1-x+5=0 \Leftrightarrow \\
&x^2-5x+6=0
\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

ii) Η ανίσωση: $f(x)\ge g(x)$ γίνεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
&x^2-4x+1\ge x-5 \Leftrightarrow \\
&x^2-4x+1-x+5\ge 0 \Leftrightarrow \\
&x^2-5x+6\ge 0
\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες τις $x_1=3$ και $x_2=2$ και το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	-∞		2		3		+∞
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2-5x+6\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$$

Από τη ιδιότητα $|\alpha|=\alpha \Leftrightarrow \alpha\ge 0$ έχουμε ότι:

$$\left| f(x) - g(x) \right| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow$$
$$f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$