ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$|x|-3\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$|x|\neq 3 \Leftrightarrow$$
$$x\neq 3 \text{ και } x\neq -3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{3,-3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^2-5|x|+6=|x|^2-5|x|+6$$

Θέτουμε $|x|=y$, (1) και η παράσταση $|x|^2-5|x|+6$ γίνεται : y^2-5y+6

Το τριώνυμο y^2-5y+6 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases} y_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ y_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

Έτσι το τριώνυμο y^2-5y+6 γίνεται:

$$y^2-5y+6=(y-2)(y-3)$$

και επομένως

$$|x|^2-5|x|+6=(|x|-2)(|x|-3).$$

Τελικά ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x)=\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}=\frac{(|x|-2)(|x|-3)}{|x|-3}=|x|-2$$

για κάθε $x\in\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{3,-3\}$.

γ) Η εξίσωση $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$ με $f(x)=|x|-2$ γράφεται:

$$(|x|-2+2)^2-4(|x|-2)-5=0\Leftrightarrow$$
$$|x|^2-4|x|+8-5=0\Leftrightarrow$$
$$|x|^2-4|x|+3=0$$

Θέτουμε $|x|=z$, (2) και βρίσκουμε:

$$z^2-4z+3=0$$

Το τριώνυμο z^2-4z+3 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4>0$$

και ρίζες τις:

$$z_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}\Rightarrow\begin{cases} z_1=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ z_2=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$

Τότε από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

$z=3\Leftrightarrow|x|=3\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$ οι οποίες όμως απορρίπτονται αφού δεν ανήκουν στο $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{3,-3\}$.

$z=1\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ οι οποίες είναι δεκτές αφού ανήκουν στο $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{3,-3\}$.