ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο: $x^2-4x+2-\lambda^2$ έχει $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=2-\lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot(2-\lambda^2)=16-8+4\lambda^2=8+4\lambda^2$$

Είναι $\Delta=8+4\lambda^2>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε

i) $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-4}{1}=4$.

ii) $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{2-\lambda^2}{1}=2-\lambda^2$

γ) Έστω $x_1=2+\sqrt{3}$ και $x_2$ η ζητούμενη ρίζα. Τότε:

i) Από το άθροισμα των ριζών έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}&x_1+x_2=4\Leftrightarrow\\&2+\sqrt{3}+x_2=4\Leftrightarrow\\&x_2=4-2-\sqrt{3}\Leftrightarrow\\&x_2=2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

ii) Από το γινόμενο των ριζών έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}&x_1\cdot x_2=2-\lambda^2\Leftrightarrow\\&(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2-\lambda^2\Leftrightarrow\\&2^2-\sqrt{3}^2=2-\lambda^2\Leftrightarrow\\&4-3=2-\lambda^2\Leftrightarrow\\&\lambda^2=1\Leftrightarrow\\&\lambda=\pm1\end{aligned}$$