ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x+1|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x+1\le 2 \Leftrightarrow -2-1\le x+1-1\le 2-1 \Leftrightarrow -3\le x\le 1,\ \ (1)$$

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει $\alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=-2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

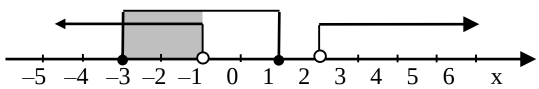
$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\ x_2=\dfrac{1-3}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

Επομένως ισχύει: $x^2-x-2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ (2)

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $x\in[-3,-1)$

γ) Επειδή $\rho_1,\rho_2\in[-3,-1)$ ισχύει ότι:

$$-3\le\rho_1<-1,\ \ (3)$$

και

$$-3\le\rho_2<-1\Leftrightarrow 3\ge-\rho_2>1\Leftrightarrow 1<-\rho_2\le 3,\ \ (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}&-3+1<\rho_1-\rho_2<1+1\Leftrightarrow\\&-2<\rho_1-\rho_2<2\end{aligned}$$

Άρα $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.