ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow (2 \le |x| \text{ (1) και } |x| \le 3 \text{ (2)}$$

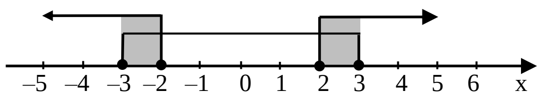
Από την ανίσωση (1) βρίσκουμε:

$$2 \le |x| \Leftrightarrow x \ge 2 \text{ ή } x \le -2 \text{ (3)}$$

Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$|x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3 \text{ (4)}$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (3) και (4) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



Οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $x \in [-3,-2] \cup [2,3]$ (5)

Το τριώνυμο $x^2 - 4x$ έχει ρίζες τις 0 και 4 αφού :

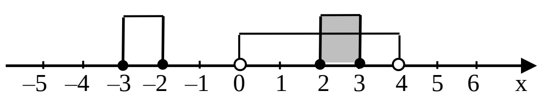
$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) - 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 4x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2 - 4x$		+	0	-	0	+	

Επομένως ισχύει: $x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,4)$ (6).

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (5) και (6) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $x \in [2,3]$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [2,3]$ ισχύει ότι:

$$2 \le \rho_1 \le 3 \text{ (7) και } 2 \le \rho_2 \le 3 \text{ (8)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (7) και (8) και βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
&2+2 \le \rho_1+\rho_2 \le 3+3 \Leftrightarrow \\
&4 \le \rho_1+\rho_2 \le 6 \Leftrightarrow \\
&\frac{4}{2} \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le \frac{6}{2} \Leftrightarrow \\
&2 \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le 3
\end{aligned}
$$

Άρα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in [2,3]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Σημείωση:

Ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών.