ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού, αν και μόνο αν:

$$\lambda^2-\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\neq 1$$

β) Με $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$ έχουμε:

$$(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)x+\lambda-1=0$$

$$\overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow} \lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Με $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$ η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=[-(\lambda+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot 1=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=(\lambda-1)^2>0$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\lambda+1\pm\sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\lambda}=\frac{\lambda+1\pm(\lambda-1)}{2\lambda}=\begin{cases}\dfrac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda}=1\\[2mm] \dfrac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$$