ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των $C_f$, $C_g$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Είναι:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2=\lambda x+1-\lambda \Leftrightarrow x^2-\lambda x+\lambda-1=0, \ (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-\lambda)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-1)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2\geq 0$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Επομένως η (1) έχει δυο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, οπότε οι $C_f$, $C_g$ έχουν, για κάθε τιμή του λ, ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Η (1) έχει μια διπλή ρίζα, δηλαδή οι $C_f$, $C_g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αν και μόνο αν:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Για λ=2, η εξίσωση γίνεται:

$$x^2-2x+1=0$$

η οποία έχει μοναδική λύση $x=1$.

Τότε $f(1)=1$, άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το (1,1).

γ) Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$$

οπότε με $\lambda\neq 2$ είναι:

$$(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2 \Leftrightarrow \lambda^2-|\lambda|+2=0 \Leftrightarrow |\lambda|^2-|\lambda|+2=0$$

Θέτουμε $|\lambda|=\kappa, \kappa>0$ και η εξίσωση γράφεται

$$\kappa^2-\kappa-2=0 \Leftrightarrow \kappa=2 \text{ ή } \kappa=-1 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Άρα, $|\lambda|=2 \Leftrightarrow -\lambda=2$ ή $\lambda=2$, που απορρίπτεται, οπότε τελικά $\lambda=-2$.