ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των $C\_{f},C\_{g}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Είναι:

$f(x)=g(x)⇔x^{2}=λx+1-λ⇔x^{2}-λx+λ-1=0$, (1)

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα

$Δ=β^{2}-4αγ=(-λ)^{2}-4⋅1⋅(λ-1)=λ^{2}-4λ+4=(λ-2)^{2}\geq 0$

για κάθε $λ\in R$. Επομένως η (1) έχει δυο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, οπότε οι $C\_{f},C\_{g}$ έχουν, για κάθε τιμή του λ, ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Η (1) έχει μια διπλή ρίζα, δηλαδή οι $C\_{f},C\_{g}$έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αν και μόνο αν:

$$Δ=0⇔(λ-2)^{2}=0⇔λ=2$$

Για λ=2, η εξίσωση γίνεται:

$$x^{2}-2x+1=0$$

η οποία έχει μοναδική λύση $x=1$.

Τότε $f(1)=1$, άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το (1,1).

γ) Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$S=x\_{1}+x\_{2}=-\frac{β}{α}=λ$$

οπότε με $λ\ne 2$ είναι:

$$(x\_{1}+x\_{2})^{2}=|x\_{1}+x\_{2}|+2⇔λ^{2}-|λ|+2=0⇔|λ|^{2}-|λ|+2=0$$

Θέτουμε $|λ|=κ,κ>0$ και η εξίσωση γράφεται

$κ^{2}-κ-2=0⇔κ=2ήκ=-1$ (απορρίπτεται)

Άρα, $|λ|=2⇔-λ=2ήλ=2$, που απορρίπτεται, οπότε τελικά $λ=-2$.