ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$ προσδιορίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$. Είναι:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ ή } x=3$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $M(-3,\,0)$ και $N(3,\,0)$.

β) Είναι:

$$f(3)=4\cdot 3+2=14\neq 0 \text{ και } f(-3)=4\cdot(-3)+2=-10\neq 0$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $M(-3,\,0)$ και $N(3,\,0)$.

γ) Έστω ότι υπάρχει κοινό σημείο $(x_o,\,0)$ του άξονα $x'x$ στο οποίο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των f, g. Τότε ισχύει:

$$\left(f(x_o)=0 \text{ και } g(x_o)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_o+2=0 \\ x_o^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o=-\dfrac{1}{2} \\ x_o=\pm 3 \end{cases}$$

που είναι άτοπο. Άρα οι C_f, C_g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $x'x$.

Έστω ότι οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $y'y$. Τότε έχουμε:

$$f(0)=g(0) \Leftrightarrow 2=-9$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $y'y$.

δ) Η γραφική παράσταση της h είναι ευθεία, οπότε ο τύπος της είναι της μορφής $h(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0,\,3)$, οπότε έχουμε:

$$h(0)=3 \Leftrightarrow \alpha\cdot 0+\beta=3 \Leftrightarrow \beta=3$$

Επομένως έχουμε $h(x)=\alpha x+3,\ \alpha\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, η γραφική παράσταση της h τέμνει την γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox οπότε ισχύει:

$$h(3)=g(3) \Leftrightarrow 3\alpha+3=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$$

Τελικά η συνάρτηση h έχει τύπο $h(x)=-x+3$.