ΛΥΣΗ

α) Το πλήθος των συνδυασμών των 20 φορολογουμένων ανά 2 είναι

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\cdot(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{\cancel{18!}\cdot 19\cdot 20}{2\cdot\cancel{18!}} = 190.$$

β) Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο Ω, που αποτελείται από όλες τις δυνατές δυάδες των 20 φορολογουμένων, όπου η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία (μη διατεταγμένες δυάδες). Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι τότε, το πλήθος των συνδυασμών των 20 φορολογουμένων ανά 2, που είναι 190.

Αφού η επιλογή των δύο φορολογουμένων γίνεται τυχαία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι δυάδες των 20 φορολογουμένων, είναι εξίσου πιθανές να επιλεγούν, άρα θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

i. Είναι A: «και οι δύο φορολογούμενοι έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν».

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A, είναι το πλήθος των συνδυασμών των 4 φορολογούμενων (που έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν), ανά 2. Άρα

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{\cancel{2!}\cdot 3\cdot 4}{2\cdot\cancel{2!}} = 6.$$

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{6}{190} = \frac{3}{95} \cong 0{,}03.$$

ii. Είναι B: «και οι δύο φορολογούμενοι δεν έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν».

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το B, είναι το πλήθος των συνδυασμών των $20 - 4 = 16$ φορολογούμενων (που δεν έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν), ανά 2. Άρα

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!\cdot(16-2)!} = \frac{16!}{2!\cdot 14!} = \frac{\cancel{14!}\cdot 15\cdot 16}{2\cdot\cancel{14!}} = 120.$$

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(B) = \frac{120}{190} = \frac{60}{95} = \frac{12}{19} \cong 0{,}63.$$

iii. Είναι Γ: «μόνο ένας από τους δύο φορολογούμενους, έχει ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν». Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Γ, προκύπτει αν από το πλήθος όλων των δυάδων των 20 φορολογουμένων ανά 2, αφαιρέσουμε το πλήθος των δυάδων των 4 φορολογουμένων (που έχουν ελεγχθεί) ανά 2 και το πλήθος των δυάδων των 16 φορολογουμένων (που δεν έχουν ελεγχθεί) ανά 2. Επομένως είναι $190 - (6 + 120) = 64$.

Εναλλακτικά: Υπάρχουν 4 τρόποι, να επιλεγεί ο φορολογούμενος που ελέγχθηκε και 16 τρόποι, να επιλεγεί ο φορολογούμενος που δεν ελέγχθηκε. Άρα από τη βασική αρχή απαρίθμησης υπάρχουν $4 \cdot 16 = 64$ τρόποι.

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P}(\Gamma) = \frac{64}{190} = \frac{32}{95} \cong 0{,}34.$$

Εναλλακτικά: Τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma = \Omega$. Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\Gamma)$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\Gamma)$$

$$\mathrm{P}(\Gamma) = \mathrm{P}(\Omega) - \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

$$\mathrm{P}(\Gamma) = 1 - \frac{6}{190} - \frac{120}{190} = \frac{64}{190} \cong 0{,}34.$$