

ΛΥΣΗ

α) Το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ οπότε $ΔΕ // ΑΒ$ και $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2}$

(1). Επειδή είναι $ΑΒ = ΑΓ$ και το Δ μέσο του ΑΓ από υπόθεση, ισχύει ότι

$ΔΓ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$, άρα και $ΔΓ = ΔΕ$ λόγω της σχέσης (1). Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές με βάση ΕΓ.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και $\widehat{Β} = 30^\circ$ από υπόθεση, ισχύει ότι $\widehat{Γ} = \widehat{Β} = 30^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές οι γωνίες οι προσκείμενες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{ΔΕΓ} = \widehat{Γ} = 30^\circ$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ ισχύει ότι $\widehat{ΕΔΓ} + \widehat{ΔΕΓ} + \widehat{Γ} = 180^\circ$ με $\widehat{ΔΕΓ} = \widehat{Γ} = 30^\circ$, οπότε

$\widehat{ΕΔΓ} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$, άρα $\widehat{ΕΔΓ} = 120^\circ$.

β) Το τμήμα ΕΔ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς, δηλαδή θα ισχύει $ΕΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ (2) και επειδή το Δ είναι μέσο της ΑΓ έχουμε $ΑΔ = \frac{ΑΓ}{2}$ (3).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ είναι $\widehat{Γ} = 30^\circ$ άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ (4).

Από (2), (3) και (4) προκύπτει ότι $ΕΔ = ΑΔ = ΑΕ$ οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

