ΛΥΣΗ

α) Το τραπέζιο είναι ισοσκελές, άρα οι γωνίες οι προσκείμενες σε κάθε βάση του είναι ίσες, οπότε $B\widehat{A}\Delta = A\widehat{B}\Gamma = 135^o$ ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

Οι $A\widehat{B}\Gamma$ και $B\widehat{\Gamma}\Delta$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$A\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Gamma}\Delta = 180^o \text{ ή } 135^o + B\widehat{\Gamma}\Delta = 180^o, \text{ άρα } B\widehat{\Gamma}\Delta = 45^o$$

Επίσης είναι $A\widehat{\Delta}\Gamma = B\widehat{\Gamma}\Delta$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΓΔ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ. Άρα $A\widehat{\Delta}\Gamma = 45^o$.

β) Επειδή τα ΑΕ, ΒΖ είναι ύψη του τραπεζίου, τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΑΕΔ είναι ορθογώνια.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 45^o$ και επειδή οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, θα ισχύει ότι:

$$Z\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 90^o \text{ ή } Z\widehat{B}\Gamma + 45^o = 90^o, \text{ άρα } Z\widehat{B}\Gamma = 45^o$$

Οπότε το τρίγωνο ΒΖΓ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με ΒΖ = ΖΓ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ είναι $\widehat{\Delta} = 45^o$ και επειδή οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, θα ισχύει ότι:

$$\Delta\widehat{A}E + \widehat{\Delta} = 90^o \text{ ή } \Delta\widehat{A}E + 45^o = 90^o, \text{ άρα } \Delta\widehat{A}E = 45^o$$

Οπότε το τρίγωνο ΑΕΔ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα ισοσκελές με ΑΕ = ΕΔ (2).

Επίσης τα ύψη του τραπεζίου είναι ίσα, οπότε ΑΕ = ΒΖ (3).

Από (1), (2) και (3) έχουμε ΑΕ = ΕΔ = ΒΖ = ΓΖ.