ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, άρα ΕΖ = $\frac{ΒΓ}{2}$ (1).

Επίσης, το Ε είναι μέσο του ΑΒ και το Ζ είναι μέσο του ΑΓ, άρα ισχύουν ΑΕ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (2) και

ΑΖ = $\frac{ΑΓ}{2}$ (3).

Επειδή το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει ότι ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ, οπότε σε συνδυασμό με τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΕΖ = ΑΕ = ΑΖ.

β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ για τις γωνίες του θα ισχύει ότι $\widehat{Α} = \widehat{Β} = \widehat{Γ} = 60^o$.

Επίσης ισχύει ότι: $ψ\widehat{Α}Γ = 180^o – \widehat{Α} = 180^o – 60^o = 120^o$.

Η Αx είναι εξωτερική διχοτόμος της $\widehat{Α}$, άρα $Δ\widehat{Α}Γ = \frac{ψ\widehat{Α}Γ}{2} = 60^o$.

Για τις οξείες γωνίες $Α\widehat{Γ}Δ$ και $Δ\widehat{Α}Γ$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ισχύει ότι $Α\widehat{Γ}Δ + Δ\widehat{Α}Γ = 90^0$, οπότε $Α\widehat{Γ}Δ = 90^o - Δ\widehat{Α}Γ = 90^o - 60^o = 30^o$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΓ, άρα ΔΖ = $\frac{ΑΓ}{2}$ = ΑΖ. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι ΑΖ = ΑΕ, άρα ΔΖ=ΑΕ (4).

Επειδή είναι $Α\widehat{Γ}Δ = 30^o$, τότε η απέναντί της κάθετη πλευρά θα είναι το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΔ = $\frac{ΑΓ}{2}$ = ΑΖ (5).

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι ΔΖ = ΑΖ = ΑΔ.

Όμως από το α) ερώτημα έχουμε ότι ΕΖ = ΑΕ = ΑΖ.

Οπότε θα έχουμε ΔΖ = ΑΔ =ΑΕ = ΕΖ, άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες του τις πλευρές ίσες.