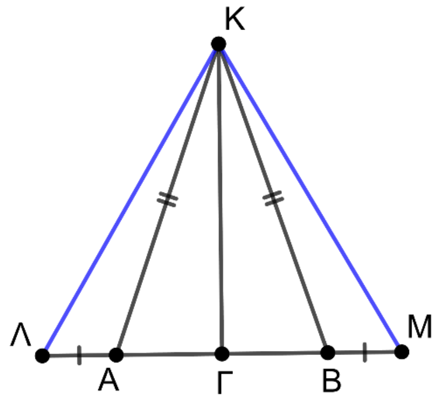
ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ=ΚΒ), η διχοτόμος ΚΓ της γωνίας του $\widehat{K}$ και σημεία Λ, Μ στις προεκτάσεις της πλευράς ΑΒ προς το Α και προς το Β αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΛ = ΒΜ.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ, το οποία έχουν:

- ΚΑ = ΚΒ, από την υπόθεση
- Κ$\widehat{A}$Λ = Κ$\widehat{B}$Μ, ως παραπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών Β$\widehat{A}$Κ και Α$\widehat{B}$Κ που είναι προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ (δηλαδή Κ$\widehat{A}$Λ =180° - Β$\widehat{A}$Κ = 180° - Α$\widehat{B}$Κ = Κ$\widehat{B}$Μ)
- ΑΛ = ΒΜ, από υπόθεση.

Οπότε τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ). Επομένως θα ισχύει ΚΛ = ΚΜ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Κ$\widehat{A}$Λ και Κ$\widehat{B}$Μ των ίσων τριγώνων. Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

β) α΄ τρόπος: Η ΚΓ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη γωνία της κορυφής $\widehat{K}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου ΚΑΒ, οπότε ΑΓ = ΒΓ.

Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΛ = ΒΜ.

Άρα ΓΛ = ΑΛ + ΑΓ = ΒΜ + ΒΓ = ΓΜ.

Συνεπώς το Γ είναι μέσο της ΛΜ και επομένως η ΚΓ είναι διάμεσος του ΚΛΜ.

β΄ τρόπος:

Η ΚΓ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη γωνία της κορυφής $\widehat{K}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ, οπότε είναι και ύψος του τριγώνου ΚΑΒ, άρα και ύψος του τριγώνου ΚΛΜ. Επειδή το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές η ΚΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ.