ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ=ΚΒ), η διχοτόμος ΚΓ της γωνίας του $\hat{K}$ και σημεία Λ, Μ στις προεκτάσεις της πλευράς ΑΒ προς το Α και προς το Β αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΛ = ΒΜ.



**α)** Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ, το οποία έχουν:

* KA = KB, από την υπόθεση
* Κ$\hat{Α}$Λ = K$\hat{Β}$M, ως παραπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών Β$\hat{Α}$Κ και Α$\hat{Β}$Κ που είναι προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ (δηλαδή Κ$\hat{Α}$Λ =180ο - Β$\hat{Α}$Κ = 180ο - Α$\hat{Β}$Κ = K$\hat{Β}$M)
* ΑΛ = ΒΜ, από υπόθεση.

Οπότε τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ). Επομένως θα ισχύει ΚΛ = ΚΜ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Κ$\hat{Α}$Λ και K$\hat{Β}$M των ίσων τριγώνων. Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

**β)** α΄ τρόπος: Η ΚΓ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη γωνία της κορυφής $\hat{K}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου ΚΑΒ, οπότε ΑΓ = ΒΓ.

Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΛ = ΒΜ.

Άρα ΓΛ = ΑΛ + ΑΓ = ΒΜ + ΒΓ = ΓΜ.

Συνεπώς το Γ είναι μέσο της ΛΜ και επομένως η ΚΓ είναι διάμεσος του ΚΛΜ.

β΄ τρόπος:

Η ΚΓ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη γωνία της κορυφής $\hat{K}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ, οπότε είναι και ύψος του τριγώνου ΚΑΒ, άρα και ύψος του τριγώνου ΚΛΜ. Επειδή το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές η ΚΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ.