ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2-2\lambda x+4\lambda+5$ έχει: $\alpha=1,\ \beta=-2\lambda,\gamma=4\lambda+5$

Έχουμε: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\lambda)^2-4\cdot1\cdot(4\lambda+5)=4\lambda^2-16\lambda-20$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

β)

i. Για $\lambda=-2$, έχουμε $\Delta=4(-2)^2-16(-2)-20=28>0$.

Για $\lambda=4$, έχουμε $\Delta=4\cdot4^2-16\cdot4-20=-20<0$.

Για το σχήμα 1: Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως ισχύει $x^2-2\lambda x+4\lambda+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο έχει σταθερό πρόσημο όταν $\Delta<0$, επομένως το σχήμα αυτό αντιστοιχεί στην τιμή $\lambda=4$.

Για το σχήμα 2: Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία επομένως η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ έχει δύο άνισες λύσεις. Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο έχει δύο άνισες λύσεις όταν $\Delta>0$, επομένως το σχήμα αυτό αντιστοιχεί στην τιμή $\lambda=-2$.

ii. Για το σχήμα 3: Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει με τον άξονα $x'x$ ένα ακριβώς κοινό σημείο επομένως η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ έχει μία διπλή ρίζα. Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα όταν $\Delta=0$.

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο του λ με $\alpha=4,\ \beta=-16,\gamma=-20$ και διακρίνουσα $\Delta'=(-16)^2-4\cdot4\cdot(-20)=256+320=576$.

Επομένως η διακρίνουσα Δ έχει ρίζες: $\lambda_1=\dfrac{16-24}{8}=-1$ και $\lambda_2=\dfrac{16+24}{8}=5$.

Συμπεραίνουμε ότι οι δυνατές τιμές του λ είναι $\lambda=-1$ ή $\lambda=5$.