ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$ έχει: $\alpha=1,\ \beta=-\lambda,\gamma=1$

Έχουμε: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-\lambda)^2-4\cdot1\cdot1=\lambda^2-4$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

β)

i. Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g πρέπει και αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $g(x)=f(x)$

Έχουμε διαδοχικά: $g(x)=f(x)\Leftrightarrow x^2-\lambda+3=\lambda x-\lambda+2\Leftrightarrow x^2-\lambda x+1=0$.

ii. Για $\lambda=1$ έχουμε: $\Delta=1^2-4=-3<0$.

Για $\lambda=2$ έχουμε: $\Delta=2^2-4=0$.

Για $\lambda=4$ έχουμε: $\Delta=4^2-4=12>0$.

Για το σχήμα 1: Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως ισχύει $g(x)>f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $(1)\Leftrightarrow x^2-\lambda+3>\lambda x-\lambda+2\Leftrightarrow x^2-\lambda x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$ έχει σταθερό πρόσημο όταν $\Delta<0$ επομένως η τιμή του λ που αντιστοιχεί στο σχήμα αυτό είναι $\lambda=1$.

Για το σχήμα 2: Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, επομένως η εξίσωση $g(x)=f(x)$ (2) έχει μία διπλή ρίζα.

Έχουμε: $(2)\Leftrightarrow x^2-\lambda+3=\lambda x-\lambda+2\Leftrightarrow x^2-\lambda x+1=0$.

Γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$ έχει μία διπλή ρίζα όταν $\Delta=0$ επομένως η τιμή του λ που αντιστοιχεί στο σχήμα αυτό είναι $\lambda=2$.

Για το σχήμα 3: Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν δύο κοινά σημεία, επομένως η εξίσωση $g(x)=f(x)$ (3) έχει δύο άνισες λύσεις.

Όπως και στην δεύτερη περίπτωση η εξίσωση (3) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$.

Γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$ έχει δύο άνισες λύσεις όταν $\Delta>0$ επομένως η τιμή του λ που αντιστοιχεί στο σχήμα αυτό είναι $\lambda=4$.