ΛΥΣΗ

α)

i. Η h είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0]$ ως άθροισμα εκθετικής με πολυωνυμική.

$h'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \leq 0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

$h''(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \leq 0$. Άρα η h είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $(-\infty, 0]$.

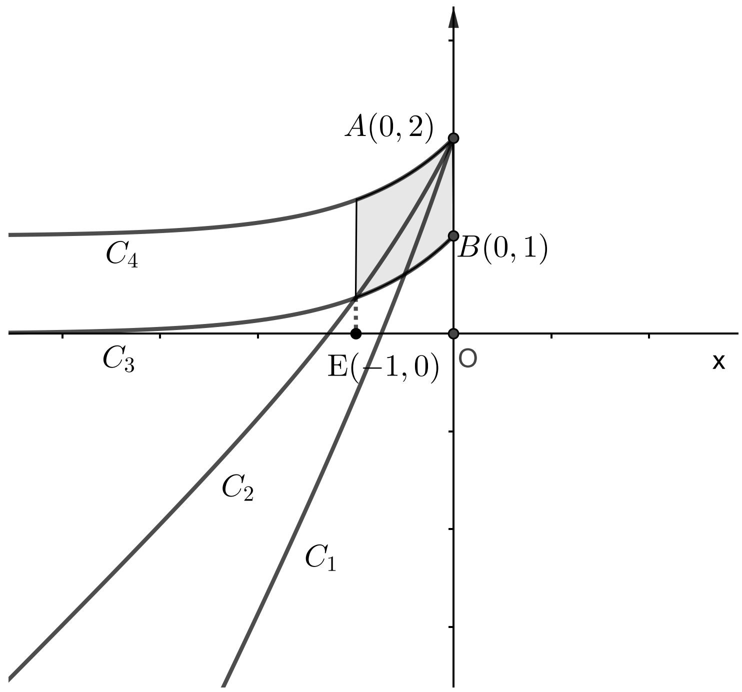
ii. Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $h((-\infty, 0]) = (\lim_{x\to-\infty} h(x), h(0)] = (-\infty, 2]$

γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$

και $h(0) = e^0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2$.

β)



- Η γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$ γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο B(0,1). Η C_f δεν τέμνει τον άξονα x’x και η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και στο $(-\infty, 0]$. Επομένως, η γραφική παράσταση C_3 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$.

- Η γραφική παράσταση της $g(x) = e^x + 1$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f αν αυτή μετατοπιστεί κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Ως εκ τούτου, η γραφική παράσταση C_4, είναι η γραφική παράσταση της $g(x) = e^x + 1$.
- Οι γραφικές παραστάσεις που απομένουν είναι η C_1 και η C_2. Παρατηρούμε ότι:

  Το σημείο της C_1 με τετμημένη $x = -1$ έχει αρνητική τεταγμένη. Έχουμε όμως $h(-1) = e^{-1} - 1 + 1 = \frac{1}{e} > 0$.

  Επομένως το σημείο $(-1, h(-1))$ δεν ανήκει στη C_1, άρα η C_1 δεν είναι η γραφική παράσταση της h.

  Έχοντας αποκλείσει όλες τις άλλες δυνατότητες, η γραφική παράσταση της h είναι η C_2.

  <u>Εναλλακτική λύση για την αντιστοίχιση της C_2 στη συνάρτηση h και την απόρριψη της C_1</u>

  Η C_1 τέμνει τον άξονα x'x σε ένα σημείο με τετμημένη μεγαλύτερη του -1, ενώ η C_2 τέμνει τον άξονα x'x σε ένα σημείο με τετμημένη μικρότερη του -1. Οπότε, για να βρούμε ποια από τις καμπύλες C_1 ή C_2 είναι η γραφική παράσταση της h, αρκεί να εξετάσουμε αν η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ρίζα και να την συγκρίνουμε με το -1.

  Από το α) ερώτημα είδαμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 2]$. Το 0 ανήκει στο $(-\infty, 2]$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία ρίζα x_0 με $x_0 \in (-\infty, 0]$ και μάλιστα μοναδική λόγω μονοτονίας της h. Επιπλέον, $\begin{cases} h(-2) = e^{-2} - 2 + 1 = \frac{1}{e^2} - 1 = \frac{1-e^2}{e^2} < 0 \\ h(-1) = e^{-1} - 1 + 1 = \frac{1}{e} > 0 \end{cases}$, οπότε από το θεώρημα Bolzano, έχουμε ότι η $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2, -1)$. Οπότε η C_2 είναι η γραφική παράσταση της h.

Τελικά:

η C_2 είναι η γραφική παράσταση της h,

η C_3 είναι η γραφική παράσταση της f και

η C_4 είναι η γραφική παράσταση της g.

γ) Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 ισούται με:

$$E = \int_{-1}^{0} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_{-1}^{0} (e^x + 1 - e^x)dx = \int_{-1}^{0} dx = [x]_{-1}^{0} = 0 - (-1) = 1\ \tau.\mu.$$

Το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_2 και C_3 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 ισούται με:

$$E_1 = \int_{-1}^{0} \big(h(x) - f(x)\big)dx = \int_{-1}^{0} (e^x + x + 1 - e^x)dx = \int_{-1}^{0} (x + 1)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\ \tau.\mu$$

Άρα $E - E_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, δηλαδή η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία, εμβαδού $\frac{1}{2}\ \tau.\mu$ το καθένα.