ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}\right)'=\left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}-1}\cdot\left(x^2+1\right)'=-\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=-\frac{3x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}.$$

- $f''(x)>0 \overset{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}>0}{\Leftrightarrow} -3x>0 \Leftrightarrow x<0$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow x>0$
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,0]$, κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στη θέση $x_0=0$.

γ)

i. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι η f' είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ αφού η f' είναι συνεχής σε αυτό και ισχύει $f''(x)>0$,
- γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ αφού η f' είναι συνεχής σε αυτό και ισχύει $f''(x)<0$ και
- παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0=0$, την $f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(0^2+1\right)^3}}=1$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)\le f'(0) \Leftrightarrow f'(x)\le 1$.

Εναλλακτικά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$f'(x)\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}\le 1 \Leftrightarrow 1\le\sqrt{\left(x^2+1\right)^3} \Leftrightarrow 1\le x^2+1 \Leftrightarrow x^2\ge 0$, που ισχύει.

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\alpha<\alpha+1 \underset{\text{γνησίως αύξουσα}}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(\alpha)<f(\alpha+1) \Rightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)>0.$$

Ακόμη για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι $f(\alpha+1)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)\le 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=0$ άρα $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx<\int_{\alpha}^{\alpha+1} 1dx \Rightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)<\alpha+1-\alpha \Rightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$.

Τελικά, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0<f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$.

β τρόπος (για τη δεξιά ανισότητα)

Για να αποδείξουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\alpha+1)-f(\alpha)<\alpha+1-\alpha$ δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\alpha+1)-(\alpha+1)<f(\alpha)-\alpha$.

Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f'(x)-1 \leq 0,\ x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x_0=0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\alpha+1$ ισχύει $g(\alpha)>g(\alpha+1) \Rightarrow f(\alpha)-\alpha>f(\alpha+1)-(\alpha+1)$ και έπεται το ζητούμενο.