ΛΥΣΗ

α) Η είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Για κάθε είναι άρα είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για κάθε έχουμε:

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα , κοίλη στο διάστημα και παρουσιάζει καμπή στη θέση .

γ)

1. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι η είναι:

* γνησίως αύξουσα στο αφού η είναι συνεχής σε αυτό και ισχύει ,
* γνησίως φθίνουσα στο αφού η είναι συνεχής σε αυτό και ισχύει και
* παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση , την .

Άρα για κάθε , ισχύει .

Εναλλακτικά, για κάθε έχουμε:

, που ισχύει.

1. Για κάθε έχουμε:

.

Ακόμη για κάθε είναι .

Για κάθε ισχύει με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν άρα .

Τελικά, για κάθε ισχύει: .

**β τρόπος** (για τη δεξιά ανισότητα)

Για να αποδείξουμε ότι για κάθε ισχύει: αρκεί να αποδείξουμε ότι δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι .

Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση . Είναι με την ισότητα να ισχύει μόνο στο , άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε για κάθε με ισχύει και έπεται το ζητούμενο.