

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0 < f(\alpha+1) - f(\alpha) < 1$.

(Μονάδες 07)