ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x-(1+x)\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και ισχύει

- $$\begin{cases} g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1 \end{cases}\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}<0$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x=(1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

Ακόμη είναι $g'(x)=\left(\eta\mu x-(1+x)\sigma\upsilon\nu x\right)'=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+(1+x)\eta\mu x=(1+x)\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x=(1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

β) Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\overset{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}x=\frac{\pi}{4}$.

α τρόπος

Για κάθε $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\varepsilon\varphi x_1<\varepsilon\varphi x_2\Rightarrow\varepsilon\varphi x_1-1<\varepsilon\varphi x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ έχουμε: $x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(x)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow f(x)<0$.

Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε: $x>\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(x)>f\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow f(x)>0$.

β τρόπος

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση, την $x=\frac{\pi}{4}$ η οποία χωρίζει το πεδίο ορισμού της f στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, σε καθένα από τα οποία η f διατηρεί σταθερό πρόσημο ως συνεχής.

Στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ βρίσκουμε την τιμή $f(0)=\varepsilon\varphi 0-1=-1$ και επειδή $f(0)<0$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ βρίσκουμε την τιμή $f(\rho)=\varepsilon\varphi\rho-1$, όπου $\rho\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (α). Αφού το ρ είναι λύση της $\eta\mu x=(1+x)\sigma\upsilon\nu x$, την επαληθεύει και έτσι έχουμε:

$$\eta\mu\rho=(1+\rho)\sigma\upsilon\nu\rho\Rightarrow\varepsilon\varphi\rho=1+\rho\Rightarrow\varepsilon\varphi\rho-1=\rho\Rightarrow f(\rho)=\rho>0\,.$$

Επειδή $f(\rho)>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό E είναι ίσο με $\mathrm{E}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}|f(x)|dx$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}|f(x)|dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|f(x)|dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}|f(x)|dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-f(x))dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\varepsilon\varphi x+1)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\varepsilon\varphi x-1)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+1\right)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+1\right)dx\\
&=\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-(\ln 1+0)-\left(\ln\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&=2\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\ln\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\\
&=\frac{\pi}{6}\ \text{τετραγωνικές μονάδες.}
\end{aligned}$$