ΛΥΣΗ

$D_f = \mathbb{R}$, αφού $1 + x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $f'(x) = \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)} = \frac{2x}{1+x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$, (αφού $1 + x^2 > 0$).

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Τα πρόσημα της παραγώγου της συνάρτησης f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty , 0]$ με $f'(x) < 0$ στο $(-\infty , 0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty , 0]$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) > 0$ στο $(0 , +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0 , +\infty)$.

Επιπλέον η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

β) $f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2\,(1+x^2) - 2x\,(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{2\,(1+x^2) - 2x\,(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$

Τα πρόσημα της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, +\infty)$ αφού είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα αυτά με $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό τους.

Ενώ στο [-1, 1] είναι κυρτή, αφού είναι συνεχής στο διάστημα αυτό με $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του.

Έχει σημεία καμπής τα σημεία (-1, f(-1)) δηλαδή το σημείο (-1, ln2) και στο σημείο (1, f(1) δηλαδή το σημείο (1 , ln2).