ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού $D_g = (0, +\infty)$.

i. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει
$\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και ένα προς ένα, άρα είναι αντιστρέψιμη.

ii. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα σε αυτό οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)\right) = \mathbb{R}$, διότι
$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2\ln x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(2\ln x) = +\infty$.
Άρα η αντίστροφη της συνάρτησης g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (το σύνολο τιμών της g). Για να βρούμε την αντίστροφη θέτουμε $y = g(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε $y = 2\ln x \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \ln x \Leftrightarrow x = e^{\frac{y}{2}}$.
Άρα $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$.

β) $D_{h\circ g^{-1}} = \left\{x \in D_{g^{-1}} \ \text{και} \ g^{-1}(x) \in D_h\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \ \text{και} \ e^{\frac{x}{2}} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$, και

$(h \circ g^{-1})(x) = h(g^{-1}(x)) = h(e^{\frac{x}{2}}) = \ln[1 + \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2] = \ln(1 + e^{x})$.