ΛΥΣΗ

α) Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι αντίστοιχα :

$D_f = \mathbb{R}$, αφού $1+e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$D_g = (0, +\infty)$.

β) $D_f \cap D_g = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in D_f \cap D_g = (0, +\infty)$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f + g$ με

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \ln(1+e^x) + 2\ln x = \ln(1+e^x) + \ln x^2 = \ln[x^2 (1+e^x)]$.

γ) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει ${x_1}^2 < {x_2}^2$ και

$e^{x_1} < e^{x_2}$ ή $1 + e^{x_1} < 1 + e^{x_2}$.

Οπότε ${x_1}^2 \cdot (1 + e^{x_1}) < {x_2}^2 \cdot (1 + e^{x_2})$, ως γινόμενο θετικών άρα

$\ln [{x_1}^2 \cdot (1 + e^{x_1})] < \ln [{x_2}^2 \cdot (1 + e^{x_2})]$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$.

Συνεπώς η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(0, +\infty)$.