ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x,$ είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2-x)^2 = (6-x)\cdot(x+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-4x+x^2 = 6x+24-x^2-4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x-20=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10) = 9+40 = 49 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+7}{2} = 5 \\ \dfrac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

β) Για $x=5$:

$$\alpha_4 = 6-x = 1,\ \ \alpha_3 = 2-x = -3 \ \text{ και } \ \alpha_2 = x+4 = 9$$

i. Ο λόγος είναι $\lambda = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{1}{3}$

ii. Είναι:

$$\alpha_2 = \alpha_1\lambda^{2-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 = \alpha_1\left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -27$$