ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $\kappa-2,\ 2\kappa$ και $7\kappa+4$ είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2\kappa)^2=(\kappa-2)\cdot(7\kappa+4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa^2=7\kappa^2+4\kappa-14\kappa-8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\kappa^2-10\kappa-8=0\quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=$$
$$=(-10)^2-4\cdot3\cdot(-8)=$$
$$=100+96=196>0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{196}}{2\cdot3}=\frac{10\pm14}{6}=\begin{cases}\dfrac{10+14}{6}=4\\ \dfrac{10-14}{6}=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Η τιμή $\kappa=-\frac{2}{3}<0$ απορρίπτεται. Άρα $\kappa=4$.

Για $\kappa=4$ οι αριθμοί γράφονται $2,8,32$ οπότε ο λόγος είναι $\lambda=\frac{8}{2}=4$.

β)

i. Είναι:

$$\alpha_2=\alpha_1\lambda^{2-1}=4\alpha_1,\ \ \alpha_4=\alpha_1\lambda^{4-1}=\alpha_1 4^3=64\alpha_1,\ \ \alpha_5=\alpha_1\lambda^{5-1}=\alpha_1 4^4=256\alpha_1$$

ii. Ισχύει ότι:

$$\alpha_2+\alpha_5=$$
$$=4\alpha_1+256\alpha_1=$$
$$=4(\alpha_1+64\alpha_1)=$$
$$=4(\alpha_1+\alpha_4)$$